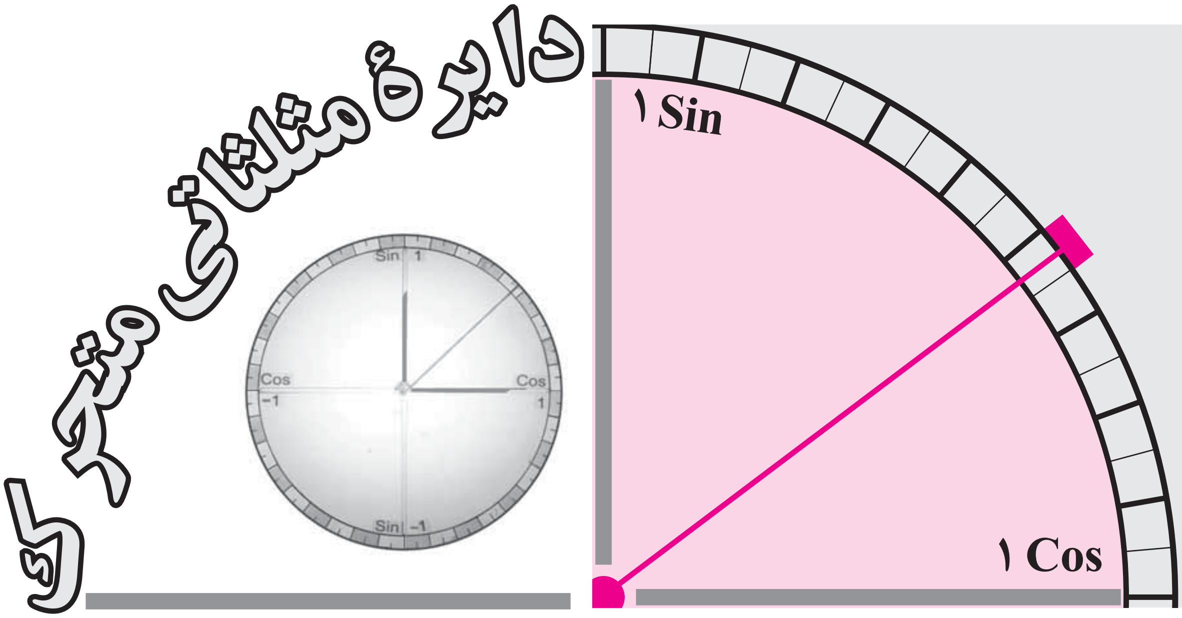
دایرهٔ مثلثاتی متحرک



زهرا خاتمی
دبیر ریاضی زنجان

دکتر مرتضی بیات
عضو هیئت علمی
دانشگاه آزاد واحد زنجان

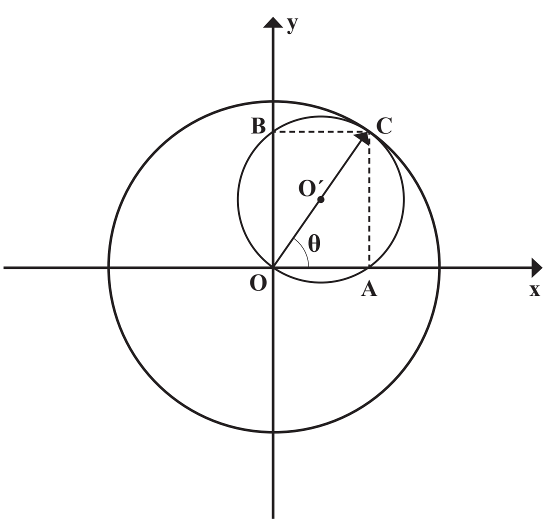
اشاره

درس مثلثات ماهیت دوگانهٔ هندسی و جبری دارد. بدین‌سبب یادگیری این درس ابتدا برای دانش‌آموزان مشکل است. در این مقاله قصد داریم مبانی ریاضی و روش ساخت یک وسیلهٔ کمک‌آموزشی به‌نام «دایرهٔ مثلثاتی متحرک» را معرفی کنیم که به کمک آن به راحتی می‌توان مفاهیم مثلثاتی را آموخت. ایدهٔ ریاضی این وسیله به مسئله‌های سادهٔ هندسی زیر برمی‌گردد:

مسئلهٔ ۱. در دستگاه مختصات xoy، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم شده است. شعاع OC را رسم کرده و وسط آن را ´O می‌نامیم. حال به مرکز ´O دایره‌ای به شعاع $r=\frac{R}{2}$ رسم می‌کنیم تا محور x و y را به‌ترتیب در نقاط A و B قطع کند. مطلوبست تعیین طول OA و OB برحسب زاویه θ.

حل: نقطهٔ C را به نقاط A و B وصل می‌کنیم. زاویه‌های OAC و OBC برابر نصف کمان روبه‌رو و برابر ۹۰ درجه هستند (شکل ۱).

بنابراین: $OA=r\cos(\theta)$ و $OB=r\sin(\theta)$.

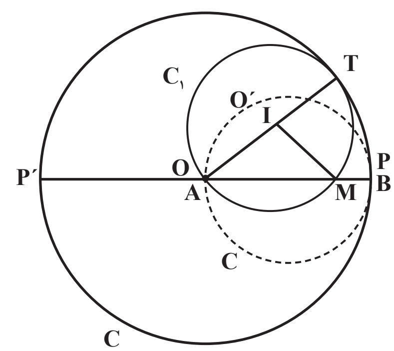


شکل۱

مسئلهٔ ۲. اگر دایره‌ای به شعاع r روی محیط دایره‌ای به شعاع $R=2r$ بدون لغزش بچرخد، هر نقطه از دایرهٔ کوچک، قطری از دایرهٔ بزرگ را به‌طور نوسانی طی می‌کند.

حل: دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R و قطر ثابت PP' از آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم دایرهٔ c به شعاع $r=\frac{R}{2}$ روی محیط داخلی این دایره بدون لغزش بچرخد (شکل ۲).

روی دایرهٔ C دو نقطهٔ ثابت A و B را که دو انتهای یک قطر هستند، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم در ابتدای چرخیدن دایرهٔ c روی محیط داخلی دایرهٔ C دو نقطهٔ A و B به‌ترتیب در O و P باشند. دایرهٔ c را در ابتدای حرکت به‌طور خط‌چین نشان داده‌ایم، اکنون دایرهٔ c را روی محیط دایرهٔ C در جهت f می‌چرخانیم و فرض می‌کنیم که پس از مدت t دایرهٔ c در وضع c_1 که در شکل نشان داده شده است، قرار گیرد. نقطهٔ تماس دو دایرهٔ C و c_1 را با T و نقطهٔ برخورد دایرهٔ c با خط PP' را با M نشان می‌دهیم. در این وضع I و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی MIT را برحسب رادیان α می‌نامیم.



شکل۲

مثلث IOM متساوی‌الساقین است ($IM=IO$، دو شعاع دایرهٔ c). زاویهٔ MIT زاویهٔ خارجی این مثلث است. یک قضیهٔ هندسه می‌گوید که زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن زاویه است. بنابراین داریم:

$$\widehat{MIT}=\widehat{IOM}+\widehat{OMI}$$

و چون: $\widehat{MOI}=\widehat{OMI}$، پس زاویهٔ MIT دو برابر زاویهٔ MOT است:

(اندازهٔ زاویهٔ MOT) $=\frac{\alpha}{2}$ (۱)

در دایرهٔ C زاویهٔ POT یک زاویهٔ مرکزی است و کمان مقابل آن در این دایره PT است. از طرف دیگر، می‌دانیم که طول یک کمان دایره برابر است با حاصل‌ضرب شعاع دایره و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان، در صورتی‌که اندازهٔ کمان برحسب رادیان بیان شود. پس:

(طول کمان PT) $=\frac{R}{2}\alpha$ (۲)

در دایرهٔ c زاویهٔ MIT زاویهٔ مرکزی است و MT کمان مقابل به آن است. پس:

(طول کمان MT) $=r\alpha$ (۳)

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۲) و (۳) با توجه به اینکه $R=2\pi$ نتیجه می‌شود:

طول کمان MT = طول کمان PT

بنابراین وقتی دایرهٔ c روی محیط داخلی دایرهٔ C در جهت بردار f بدون لغزش می‌چرخد، نقطهٔ B از دایرهٔ c که در ابتدای حرکت در نقطهٔ P بود، قطر PP' را از نقطهٔ P به‌سوی نقطهٔ P' می‌پیماید و سپس همین قطر را از نقطه P' به‌سوی نقطهٔ P طی می‌کند (حرکت رفت و برگشت).

یک کاربرد این مسئله در تبدیل حرکت دورانی به حرکت مستقیم است که در کارکرد سیلندر و پیستون و اره‌های برقی که به‌صورت رفت و برگشت کار می‌کنند، دیده می‌شود.

ساخت دایرهٔ مثلثاتی متحرک

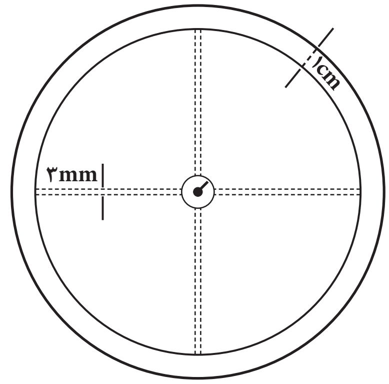
در اینجا به کمک دو مسئلهٔ هندسی بالا روش ساخت وسیله‌ای را برای تدریس درس مثلثات ارائه می‌دهیم. به تجربه در کلاس درس دریافته‌ایم که استفاده از این وسیله موجب آموزش سریع و تعمیق مفاهیم مربوط به درس مثلثات می‌شود.

نام وسیله: دایرهٔ مثلثاتی متحرک
مخاطبان: دانش‌آموزان دورهٔ دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، دانشجویان فنی، دانشجو معلمان و دبیران.
هدف: ساخت وسیله‌ای متحرک و پویا برای آموزش نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و تعدادی از روابط مثلثاتی.

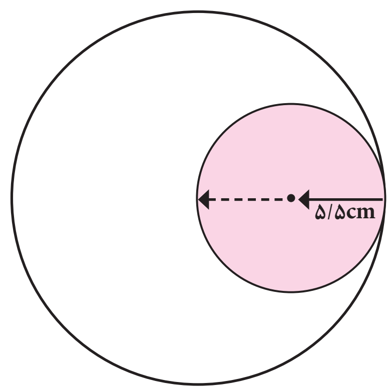
روش ساخت

ابتدا دایره‌ای مقوایی به شعاع ۱۲ سانتی‌متر تهیه می‌کنیم. سپس دو دایره به شعاع‌های ۷ میلی‌متر و ۱۱ سانتی‌متر به مرکز دایرهٔ ۱۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. مطابق شکل ۴، شیارهایی به ضخامت ۳ میلی‌متر به‌صورت علامت جمع با استفاده از تیغ و در امتداد خط‌چین می‌بریم. (باید مواظب باشیم که دایرهٔ به شعاع ۷ میلی‌متر بریده نشود.)

برای استحکام بیشتر شکل به‌دست آمده، طلقی شفاف (بی‌رنگ) به شعاع ۱۲ سانتی‌متر را با استفاده از چسب مایع به‌دقت پشت این دایره می‌چسبانیم. برای نشان دادن اندازهٔ زاویه، نوار بین دایره‌های



شکل ۳

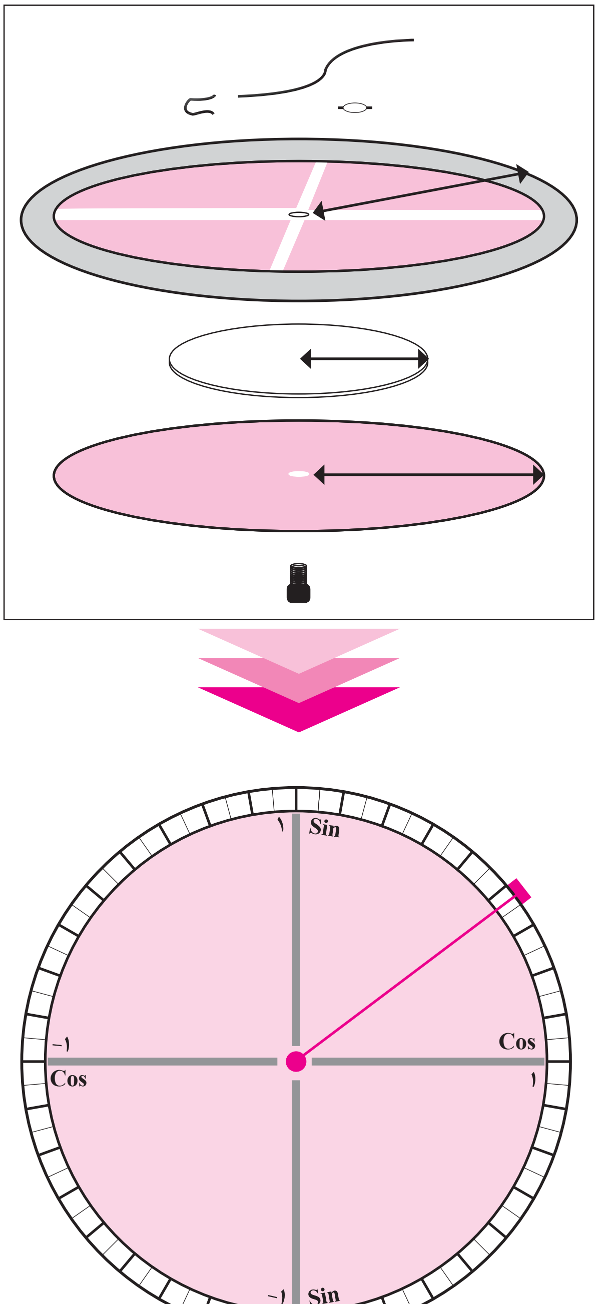


شکل ۴

به شـعاع ۱۱ و ۱۲ سـانتی‌متر را با اسـتفاده از نقاله به ۳۶ قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشانگر ۱۰ درجه است (شکل ۵).

اینک نوبت به دایرهٔ به شـعاع ۱۱ سـانتی‌متر می‌رسـد. دایرهٔ شـبرنگی به شعاع ۵/۵ سـانتی‌متر را روی دایرهٔ دیگری که قبلاً به شعاع ۱۱ سانتی‌متر داشتیم، مطابق شکل ۴ می‌چسبانیم.

اینک شـکل ۴ را زیر شـکل ۳ قـرار می‌دهیم و با اسـتفاده از واشـر کوچک و پرچ ماده، آن‌ها را به هـم محکم می‌کنیم. این دو باید طوری روی هم پرچ شـوند که دایرهٔ زیری به‌صورت روان حول محل پرچ، دور خود بچرخد. هنگام چرخیدن متوجه می‌شـوید که دایرهٔ قرمز زیری محورهای افقی (محور کسینوس) و محور عمودی (محور سینوس) را قطع می‌کند. حال برای مشخص شدن زاویهٔ این نسـبت‌ها، طلق ۱ در ۳ را با اندکی حرارت به‌صورت شـکل U خم می‌کنیم به‌طوری که یک سـاق آن یک سانتی‌متر و ساق دیگر آن ۱/۵ سـانتی‌متر باشد. سپس قسـمت بلندتر را با استفاده از چسب مایع به پشـت دایره با شعاع ۱۱ سانتی‌متر می‌چسبانیم، طوری که محیط دو دایره داخل شکل U قرار گیرد و دو دایره به‌صورت آزادانه روی هـم حرکت کنند. اینک یک سـر کشِ نـازک را از داخل پرچ ماده عبور می‌دهیم و در آنجا با گرهی ثابت می‌کنیم. سـپس سـر دیگر را روی سـاق کوتاه طلق U شکل که در قسمت جلوی وسیله قرار گرفته اسـت، با استفاده از چسـب مایع محکم می‌کنیم. حال با چرخاندن دایرهٔ پشـتی که طلق به آن متصل اسـت، کش نیز به حرکت درمی‌آید و زاویهٔ مربوطه را با محور افقی مشـخص می‌کند (شکل ۵).



شکل ۵

روش استفاده

با این وسیله ابتدا می‌توانید دایرهٔ مثلثاتی با شعاع ۱، محورهای سینوس و کسینوس و همچنین زاویه‌های ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد بـا هر اندازه را به دانش‌آموزان معرفی کنید. در ضمن می‌توان چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی و علامت نسبت‌های سینوس و کسینوس را در هر ربع مشــخص کرد و تغییرات مقدار سینوس و کسینوس را هم‌زمان بین ۱ و ۱- به‌صورت شهودی و قابل لمس نشان داد. با اندکی دقت اتحاد فیثاغورس برای زاویهٔ دلخواه θ به راحتی به‌دست می‌آید:

$$\cos^۲(\theta)+\sin^۲(\theta)=۱$$

حـال زاویه را برابر صفر در نظـر می‌گیریم (در این حالت کش روی محور کســینوس منطبق است). مشاهده می‌شود که کل شیار محور کســینوس، قرمزرنگ و کل شــیار محور سینوس، سفیدرنگ است. یعنی: $\sin(۰)=۰$ و $\cos(۰)=۱$.

بـا چرخاندن دایرهٔ پشــتی، زاویــه افزایش می‌یابــد و از طول نوار قرمز در شــیار کسینوس کاســته و رفته‌رفته به طور نوار قرمز متحرک در شــیار ســینوس افزوده می‌شــود. یعنی سینوس زیاد و کســینوس کم می‌شــود (در ربع اول). در حالت زاویهٔ ۴۵ درجه، با رسم عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس مشاهده می‌شود که مقدار سینوس و کســینوس برابر است (شکل ۶). البته می‌توان مقادیر ســینوس و کســینوس برای زاویه‌های خاص را روی شــکل مشــخص کرد، اما بهتر است این کار به جلسات بعدی موکول شود تا وســیلهٔ کمک‌آموزشی در جلسهٔ اول تاحدامکان ساده و قابل فهم باشــد. در حالت زاویهٔ ۹۰ درجه مشــاهده می‌شود که $\sin(۹۰)=۱$ و $\sin(۹۰)=۰$ اســت. همچنین، مقادیر سینوس و کسینوس ۱۸۰، ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه نیز به وضوح قابل مشاهده است.

یکــی دیگــر از کاربردهای این وســیله در آمــوزش روابط بین نســبت‌های مثلثاتی اســت که دانش‌آموزان به کمک آن می‌توانند به درک شــهودی این موضوع برســند. مثلاً روابط زیر را می‌توانیم نشان دهیم:

$\sin(۳۰)=-\sin(-۳۰)$ و $\cos(۳۰)=\cos(-۳۰)$

یعنی مقدار طولی ســینوس ۳۰ درجه و ســینوس ۳۰- درجه برابر اســت، ولی این دو قرینهٔ هم‌اند. همچنین کسینوس ۳۰ درجه و کسینوس ۳۰- درجه هم از نظر مقدار طولی و هم از نظر علامت یکسان هستند.

در ضمــن علامت تانژانــت و کتانژانت را نیز می‌توان با توجه به تعریف آن‌ها به کمک علامت‌های ســینوس و کســینوس به‌دســت آورد.

در ادامه با مشاهدهٔ چند مثال دیگر برای زاویه‌های بین ۰ و ۹۰ درجه به این روابط می‌رسیم:

$$\sin(-x)=-\sin(x)$$

$$\cos(x)=\cos(-x)$$

و با همین روش روابط زیر نیز قابل بررســی اســت (بهتر است $x=۲۰$ در نظر گرفته شود):

$$\sin(۱۸۰-x)=\sin(x)$$

$$\cos(۱۸۰-x)=-\cos(x)$$

همچنین:

$$\sin(۱۸۰+x)=-\sin(x)$$

$$\cos(۱۸۰+x)=-\cos(x)$$

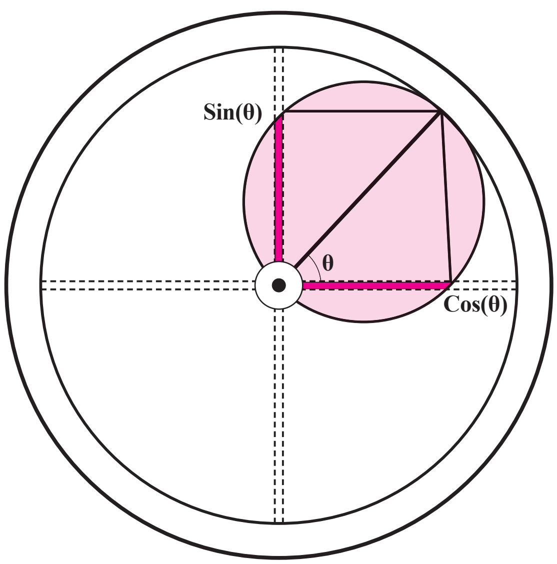
و نیز داریم:

$$\sin(۹۰-x)=\cos(x)$$

$$\cos(۹۰-x)=\sin(x)$$

$$\sin(۹۰+x)=\cos(x)$$

$$\cos(۹۰+x)=-\sin(x)$$



شکل ۶

در پایان متذکر می‌شــویم که معلم و شاگرد، خود نیز می‌توانند از روی این دایره روابط جدید دیگر را نیز مورد بررسی قرار دهند.

منابع

۱. شرف‌الدین، احمد (۱۳۷۷). **هندسه دلپذیر**. انتشارات مدرسه. تهران.

۲. تیموری، قاسم (۱۳۷۹). **ساخت دست‌سازه‌های ریاضی با طلق و مقوا** (متحرک‌سازی خطوط نمودارها). انتشارات مؤسسهٔ منادی تربیت. تهران.